12 toner - hvorfor?

I dag er den ligesvævende stemning den absolut mest udbredte. Ligesvævende, eller veltempereret, stemning inddeler en oktav i 12 logaritmisk fordelte skridt, og gør på den måde alle toner ligestillede. Dette giver god mening, da det så er muligt at spille musik i alle tonearter, uden problemer. Men hvorfor lige 12 toner? Den mest optimale ligesvævende inddeling af oktaven i et antal halvtoner, antager vi at være den inddeling, der kommer så tæt som muligt på de "naturlige" intervaller, og som har et "rimeligt" antal toner, altså et antal, der gør det praktisk muligt at konstruere og spille på f.eks. et klaviatur. I det nedenstående forsøger vi at undersøge om 12 er det optimale antal.

Lad os kalde vores grundfrekvens for G (med 440 Hz svarende til kammertonen A).

In[4]:=
```
G = 440;
```

Lad os nu kalde vores tone (heltal mellem 0 og antallet af halvtoner i vores skala) for t og definere en frekvensfunktion, f, der giver frekvens som funktion af tonen, t, og antal toner i en oktav, a.

In[1]:=
```
f[t_, a_] := 2^(t/a) G
```

Vi ønsker at visualisere fordelingen af frekvenser i en oktav med en oktav opdelt i forskellige forskellige antal halvtoner. Dette kan vi gøre med et "stacked barchart", som de fleste regneark kan lave. Til det formål har vi brug for en funktion, der viser afstanden mellem tonerne i vores halvtoneskalaer, så vi kan lægge disse oven på hinanden i grafen.
Vi definerer derfor en funktion, fs, der giver frekvensskridtene, altså afstanden mellem en tone t og den næste i rækken i Hz.

In[2]:=
```
fs[t_, a_] := f[t + 1, a] - f[t, a]
```

Vi definerer nu en funktion, der kan lave en tabel med frekvensskridtene i en skala, som funktion af antallet af halvtoner i skalaen.

In[3]:=
```
FrekvensSkridt[a_] := Prepend[Table[N[fs[t, a]], {t, 0, a - 1}], G]
```

Lad os f.eks. se, hvordan frekvenserne fordeler sig i den normale inddeling af oktaven i 12 skridt.

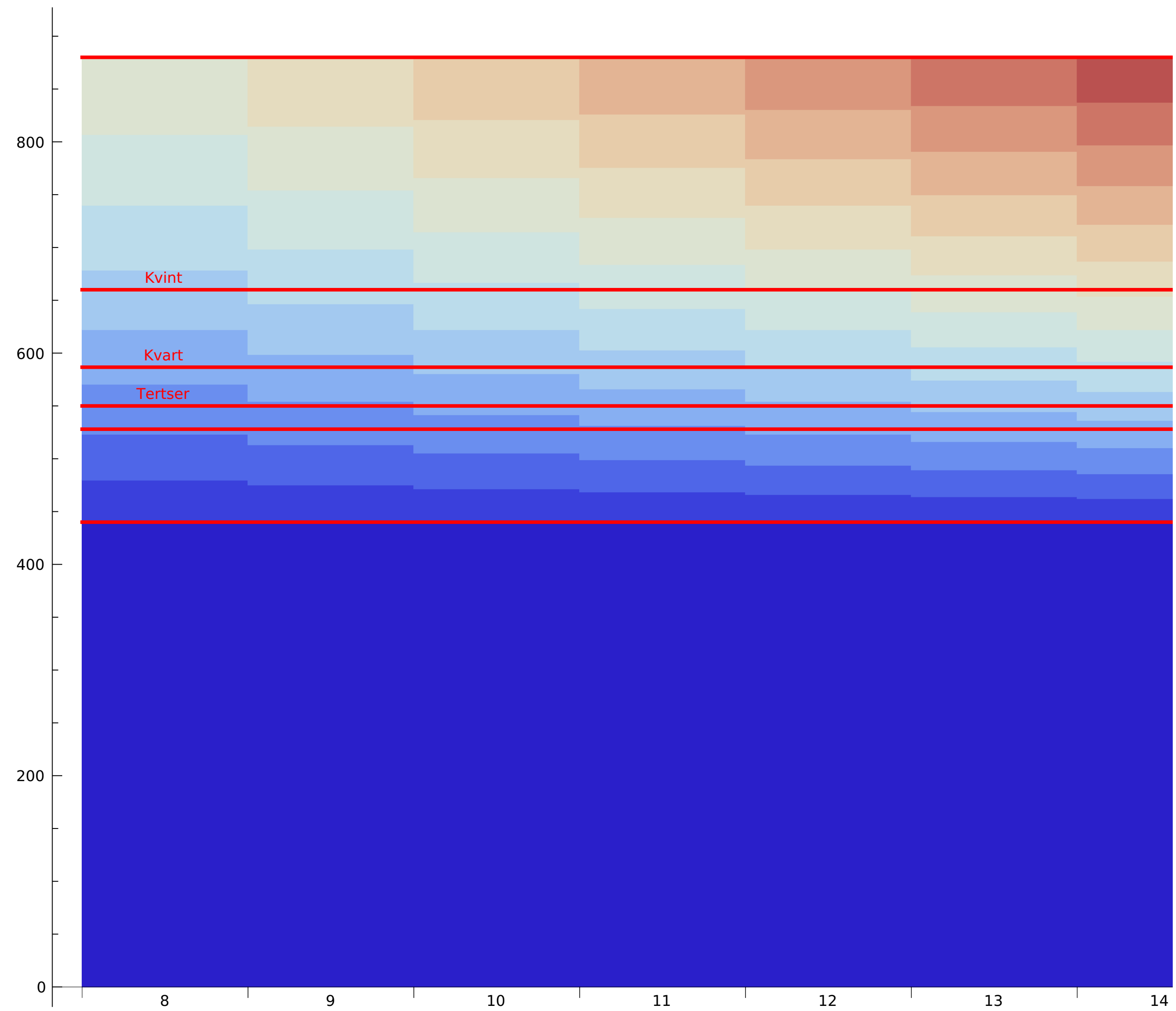
In[5]:=
```
FrekvensSkridt[12]
```

Out[5]=
```
{440, 26.1638, 27.7195, 29.3678, 31.1141, 32.9643,
 34.9244, 37.0011, 39.2013, 41.5324, 44.002, 46.6185, 49.3906}
```

Vi er nu klar til at lave vores "barchart". Vi har valgt at visualisere fordelingen af frekvenser med oktaven inddelt i fra 8 til 16 skridt. Hensigten er at undersøge hvilken ligesvævende inddeling, der resulterer i toner, der ligger tættest på de vigtigste, intervaller, nemlig kvinten, kvarten og tertsen, svarende til forholdene 3/2, 4/3 og 5/4, som vi ved fra tidligere i opgaven. Vi har indtegnet vandrette streger, der viser disse intervaller.

In[10]:=
```
BarChart[{FrekvensSkridt[8], FrekvensSkridt[9], FrekvensSkridt[10],
  FrekvensSkridt[11], FrekvensSkridt[12], FrekvensSkridt[13],
  FrekvensSkridt[14], FrekvensSkridt[15], FrekvensSkridt[16]},
 ChartLayout → "Stacked", ChartStyle → "ThermometerColors",
 BarSpacing → {0, 0}, PerformanceGoal → "Speed",
 ChartLabels → {Range[8, 16], None},
 Epilog → {Directive[{Thick, Red}], Line[{{0.5, G}, {9.5, G}}],
  Line[{{0.5, G * 2}, {9.5, G * 2}}],
  Line[{{0.5, G * 1.5}, {9.5, G * 1.5}}],
  Line[{{0.5, G * 6 / 5}, {9.5, G * 6 / 5}}],
  Line[{{0.5, G * 5 / 4}, {9.5, G * 5 / 4}}],
  Line[{{0.5, G * 4 / 3}, {9.5, G * 4 / 3}}],
  Text[Style["Tertser", Thin], {1, G * 5 / 4 + 12}],
  Text[Style["Kvart", Thin], {1, G * 4 / 3 + 12}],
  Text[Style["Kvint", Thin], {1, G * 3 / 2 + 12}]}]
```

Out[10]=



Som det ret tydeligt fremgår, er inddelingen af oktaven i 12 intervaller, uden sammenligning den inddeling mellem 8 og 16, der resulterer i toner, der ligger tættest på de tre viste naturlige intervaller.